Proceedings of IAM, V.6, N.1, 2017, pp.102-108

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА

Ф.А. Алиев[1], В.Б. Ларин[2]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, ул. З. Халилова, 23, Баку, Азербайджан
[2] Институт Механики Академии Наук Украины, Украина
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматриваются алгоритмы решения матричного уравнения Сильвестра, где в первом алгоритме используется ее специфика. Отмечена возможность использования в этом алгоритме процедуры символического расчета для повышения точности. Во втором алгоритме используются процедуры линейных матричных неравенств. На примере проведено сравнение точности этих алгоритмов.

Ключевые слова: Матричное уравнение Сильвестра, пакет MATLAB, Symbolic Math Toolbox, Метод LMI, декомпозиция SV.

AMS Subject Classification: 15A06, 15A24, 15A69.

1. Введение

Задача разработки алгоритмов решения уравнения Сильвестра:

$$AX - XB = C. \tag{1}$$

продолжает привлекать внимание исследователей (см. [6,8,11,13], где есть дальнейшие ссылки). В (1) A, B - квадратные матрицы размеров $A \in C^{n\times n}$, $B \in C^{m\times m}$. В рассмотренной в [2] итерационной процедуре нахождения решения несимметричного уравнения Риккати (аналогично симметрического уравнения Риккати [2-5,10.17,18]) возникает задача (соотношение (2.1) [7]) построения решения (1), дополненного следующим соотношением:

$$DX = G, \tag{2}$$

где D, G – матрицы соответствующих размеров.

Ниже рассмотрена задача нахождения решения системы (1), (2).

2. Уравнение (1).

В [1, 12,14-16] приведено конечное выражение для матрицы X, которая удовлетворяет следующему матричному уравнению:

$$AX - XB = C. \tag{3}$$

Согласно [12, 16] решение этого уравнения имеет вид

$$X = -(C_n + p_1 C_{n-1} + \ldots + p_{n-1} C_1)[P_A(B)]^{-1}, \tag{4}$$

где $P_A(t)$ – характеристический полином матрицы A

$$P_A(t) = t^n + p_1 t^{n-1} + \ldots + p_{n-1} t + p_n\,, \tag{5}$$

а матрицы C_n определяют так:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} C B^{k-1}\,. \tag{6}$$

Выражение (4) является следствием более общего соотношения, полученного в [1,12, 14,15], а именно, если

$$\Pi(t) = t^n + \pi_1 t^{n-1} + \ldots + \pi_{n-1} t + \pi_n \tag{7}$$

есть некоторый полином, то решение уравнения (4) удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Pi(A)X - X\Pi(B) = C_n + \pi_1 C_{n-1} + \ldots + \pi_{n-1} C\,. \tag{8}$$

Формула (4) получается, если $\Pi(t)$ в (8) выбрать равным $P_A(t)$.

Если в (8) в качестве полинома $\Pi(t)$ выбрать характеристический полином матрицы B:

$$P_b(t) = t^m + q_1 t^{m-1} + \cdots + q_{m-1} t + q_m\,, \tag{9}$$

то решение (1) будет удовлетворять следующему соотношению:

$$P_b(A)X = C_m + q_1 C_{m-1} + \cdots + q_{m-1} C\,, \tag{10}$$

Фигурирующие в (10) матрицы C_ℓ $(\ell = 1:m)$ определяются соотношениями, аналогичными (6).

Пополнив (10) соотношением (2), получим систему уравнений, определяющих искомую матрицу X:

$$\begin{bmatrix} P_b(A) \\ D \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} C_q \\ G \end{bmatrix},\; C_q = C_m + q_1 C_{m-1} + \cdots + q_{m-1} C\,. \tag{11}$$

Для решения системы (11) можно использовать различные алгоритмы, в частности, процедуру «\» пакета MATLAB.

Отметим, что для получения решения в более общем случае (когда система состоит из двух пар уравнений (1), (2) (соотношения (3.2) [6])), возможно, окажется эффективным алгоритм [5], который был использован для нахождения решения системы периодических уравнений Сильвестра.

3. Пример 1.

Фигурирующие в уравнениях (1), (2) матрицы A, B, C, D, G имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\; C = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 8 & 0 \\ 20 & 10 \end{bmatrix},\; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\; G = \begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Полином $P_b(A) = A^2 - 7A$. Согласно (11) матрица C_q имеет вид:

$$C_q = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 12 \\ 36 & 44 \end{bmatrix}.$$

Точное решение X системы (1), (2) при таких исходных данных имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате решения системы (1), (2) получено решение X_n, которому соответствует погрешность $er = norm(X - X_П, inf)$:

$$er = 2{,}6 \cdot 10^{-15}.$$

Отметим, что использованные выше процедуры допускают реализацию вычислений с произвольной точностью путем использования пакета Symbolic Math Toolbox пакета MATLAB.

Далее рассмотрим алгоритм решения уравнений (1), (2), в котором используются процедуры линейных матричных неравенств (ЛМН), а именно, процедуры LMI toolbox пакета MATLAB [9].

4. Решение уравнений (1), (2) с использованием процедур LMI toolbox пакета MATLAB.

Рассмотрим соответствующие процедуры.

Как отмечено в [7] (соотношения (2.3), (2.4)), матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \tag{12}$$

где матрицы $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$, $S(x)$ линейно зависят от x, эквивалентно следующим матричным неравенствам:

$$R(x) > 0,\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0. \tag{13}$$

Рассмотрим следующее ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z & T \\ T^T & I \end{bmatrix} > 0,\ Z = Z^T,\ \ Z < \lambda I. \tag{14}$$

Здесь и далее верхний индекс «T» означает транспонирование, I – единичная матрица соответствующего размера, λ – скаляр. Приняв во внимание (12), (13), соотношения (14) можно переписать следующим образом:

$$Z > TT^T,\ Z < \lambda I \text{ или } \lambda I > TT^T. \tag{15}$$

Соотношения (15) позволяют рассмотреть следующую стандартную задачу ЛМН на собственные значения (п.2.2.2 [5]), а именно, задачу минимизации λ при выполнении условий (15).
Соотношения (14) можно обобщить в виде следующей системы ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z & T_i \\ T_i^T & I \end{bmatrix} > 0, \; i = 1,2,\ldots,k \; Z = Z^T, \;\; Z < \lambda I, \tag{16}$$

которую можно представить в виде, аналогичном (15):

$$Z > T_i T_i^T, \; i = 1,2,\ldots,k \quad Z < \lambda I. \tag{17}$$

Применительно к (17), также можно рассматривать стандартную задачу ЛМН на собственные значения и для ее решения использовать процедуру gevp.m пакета MATLAB [7].

Используем приведенные выше соотношения для нахождения решения уравнений (1), (2). Пусть в (16) матрицы T_1, T_2 имеют вид:

$$T_1 = AX - XB - C, \tag{18}$$

$$T_2 = DX - G. \tag{19}$$

При необходимости, матрицы D, G в (19) необходимо дополнить нулевыми блоками так, чтобы матрицы $T_1 T_1^T$, $T_2 T_2^T$ имели бы одинаковый размер (см. пример 2).
Используя процедуру gevp.m пакета MATLAB, найдем минимальное значение λ (и соответствующее значение X), при которых выполняются соотношения (17). Очевидно, что при достаточно малой величине λ, норма матриц T_i также будет достаточно мала, т.е. $T \cong 0$ и, следовательно, полученное в результате использования процедуры gevp.m, значение X можно рассматривать как полученное с определенной точностью решение уравнений (1), (2). В связи с тем, что минимизируется не норма матриц T_i, а норма матриц $T_i T_i^T$, можно ожидать снижения точности результата решения уравнений (1), (2).

5. Пример 2.

Исходные данные совпадают с принятыми в примере 1, кроме значений матриц D и G, которые, в соответствии с замечанием, сделанным выше, применительно к соотношениям (18), (19), приняты в следующем виде

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате использования процедуры, описанной в п. 4, получена матрица $X_П$ – решение (1), (2) и значения матриц T_1, T_2, которым соответствуют следующие нормы погрешностей:

$$\|T_1\|_\infty = 1{,}3 \cdot 10^{-9},$$
$$\|T_2\|_\infty = 2{,}9 \cdot 10^{-9},$$
$$\|X_П - X\|_\infty = 7{,}2 \cdot 10^{-9}.$$

Таким образом, точность полученного решения (1), (2) в этом примере ниже точности, которую обеспечивает алгоритм п.2.

6. Заключение

Рассмотрены алгоритмы решения уравнения Сильвестра дополнительным линейным уравнением. В первом алгоритме используется специфика уравнения Сильвестра. Отмечается возможность использования в этом алгоритме процедур символьных вычислений для повышения точности результата. Во втором алгоритме используются процедуры линейных матричных неравенств. На примере проводится сравнение точности этих алгоритмов.

Литература

1. Aliev F.A., Bashar U., Oztash O., An algorithms for the solution of Discrete Lyapunov Equation, Avtomatika, No.6, 1993.
2. Aliev F.A., Larin V.B., On the algorithms for solving discrete periodic Riccati equation, Appl. Comput. Math, Vol.13, N.1, 2014, pp.46-54.
3. Aliev F.A., Larin V.B., On the construction of general solution of the generalized Sylvester equation, TWMS J. App. Eng. Math., 7, 2017, pp.1-6.
4. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of linear control systems. Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1998, 261 p.
5. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Gasimova K.G., On periodic solution of Generalized Sylvester matrix equation, Appl. Comput. Math, Vol.16, No.1, 2017, pp.78-84.
6. Barlow J.B., Monahemi M.M., O'Leary D.P., Constrained Matrix Sylvester Equations, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol.13, No.1, 1992, pp.1-9.
7. Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia: SIAM, 1994, 289 p.
8. Fan H.Y., Chu E.K.W., Projected nonsymmetric algebraic Riccati equations and refining estimates of invariant and deflating subspaces, Journal of Computational and Applied Mathematics, 315, 2017, pp.0–86.
9. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M., LMI Control Toolbox Users

Guide, The MathWorks Inc., 1995, 306 p.
10. Larin V.B., On Solution of the Generalized Riccati Equations, Journal of Automation and Information Sciences, Vol.48, No.11.
11. Larin V.B., Solution of Matrix Equations in Problems of the Mechanics and Control, Int. Appl. Mech., Vol.45, N.8, 2009, pp. 847–872.
12. Shestopal V.E., Solving the matrix equation $AX - XB = C$, Mat. Zametki, Vol.19, No.3, 1975, pp.449–451.
13. Zhou R., Wang X., Tang X.B., Preconditioned Positive-Definite and Skew-Hermitian Splitting Iteration Methods for Continuous Sylvester Equations $AX + XB = C$, East Asian Journal on Applied Mathematics, Vol.7, No.1, 2017, pp.55-69.
14. Алиев Ф.А., Методы решение прикладных задач оптимизации динамических систем, Баку, Елм, 1989, 320с.
15. Алиев Ф.А., Решение дискретного матричного уравнения Ляпунова, ДАН Азерб., Vol.37, №2, 1981, сс.6-10.
16. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н., Оптимизация линейных вариационных во времени систем управление, Наука, Думка, 1978, 327с.
17. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., О построении общего решения обобщенного уравнения Сильвестра, Proceedings of IAM, Vol.5, No.1, 2016, pp.3-10.
18. Ларин В.Б., Методы решения алгебраических уравнений Риккати, Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, №2, 1983, сс.186-199.

Silvester tənliyinin həllinin qurulması haqqında

F.Ə.Əliyev, V.B.Larin

XÜLASƏ

Matris Silvester tənliyinin həllinin qurulması məsələsinə baxılmışdır. Birinci alqoritmdə matris Silvester tənliyinin xüsusiyyətlərindən istifadə olunur. Bu alqoritmdə dəqiqliyin artırılması üçün simvol hesablamalardan istifadə qeyd olunur. İkinci alqoritmdə xətti matris bərabərsizliklər prosedurundan istifadə olunur. Misallar üzərində alqoritmlərin dəqiqliyi müqayisə olunur.

Açar sözlər: Matris Silvester tənliyi, MATLAB paketi, Symbolic Math Toolbox, LMI üsulu, SV ayrılışı.

About solution of constrained matrix Sylvester equation

F. A. Aliev, V. B. Larin

ABSTRACT

Algorithms of solving constrained matrix Sylvester equation are viewed. In the first algorithm, the specificity of the matrix Sylvester equation is used. It is noted the possibility in this algorithm to use the procedures of symbolic calculation for pinch of accuracy. In the second algorithm, the procedures of the linear matrix inequalities are used. On the example, the comparison of accuracy of these algorithms is spent.

Keywords: matrix Sylvester equation, MATLAB package, Symbolic Math Toolbox, LMI method, SV Decomposition.